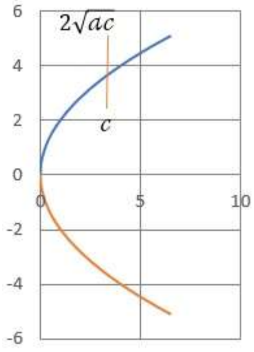
P205 平面曲線の長さ

例9

放物線　$y^2=4ax$　上の点　$(c、2\sqrt{ac})$　から,頂点までの曲線の長さ　$(c>0)$



$$\mathcal{L}=\int_0^{2\sqrt{ac}}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$$\mathcal{L}=\int_0^{2\sqrt{ac}}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy=\int_0^{2\sqrt{ac}}\sqrt{1+\left(\frac{y}{2a}\right)^2}dy$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^{2\sqrt{ac}}\sqrt{(2a)^2+y^2}dy$$

$$=\frac{1}{4a}\left[y\sqrt{(2a)^2+y^2}+(2a)^2\log\left(y+\sqrt{(2a)^2+y^2}\right)\right]_0^{2\sqrt{ac}}$$

$$=\frac{1}{4a}(2\sqrt{ac})\sqrt{4a^2+4ac}+\frac{4a^2}{4a}\left\{\log\left(2\sqrt{ac}+\sqrt{4a^2+4ac}\right)-\log 2a\right\}$$

$$=\sqrt{c}\sqrt{a+c}+a\{\log 2\sqrt{a}(\sqrt{c}+\sqrt{a+c})-\log 2a\}$$

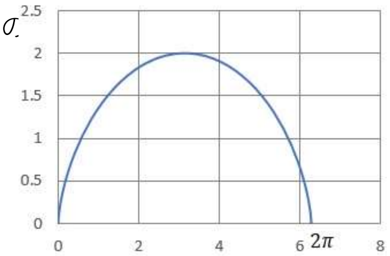
$$=\sqrt{c(a+c)}+a\left(\log 2+\frac{1}{2}\log a+\log(\sqrt{c}+\sqrt{a+c})-\log 2-\log a\right)$$

$$=\sqrt{c(a+c)}+a\log(\sqrt{c}+\sqrt{a+c})-\frac{a}{2}\log a$$

例10

サイクロイド　$x=a(t-\sin t)$　、$y=a(1-\cos t)$　の

$x=0〜2\pi$　までの長さ



$$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)\qquad \frac{dy}{dt}=a\sin t$$

となるから求める長さは

$$\mathcal{L}=\int_0^{2\pi}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}(dt)^2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\{a^2(1-2\cos t+\cos^2 t)+a^2\sin^2 t\}$$

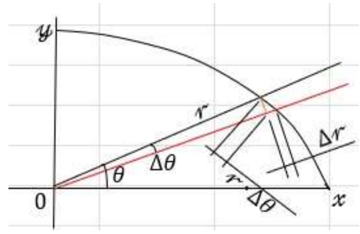
$$=a^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)=2a^2(1-\cos t)$$

$$=2a^2\left(\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}-\left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)\right)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

$$\mathcal{L}=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=2a\big(2-(-2)\big)=8a$$

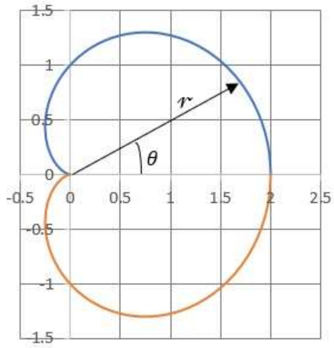
参考公式

$$\int_0^{\pi}\sqrt{(r\cdot\Delta\theta)^2+(\Delta r)^2}=\int_0^{\pi}\sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2\right\}^2}\ (\Delta\theta)^2$$



例11

心臓型　$r=a(1+\cos\theta)$　の全長　$(a>0)$



求める全長は

$$\mathcal{L}=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=a^2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)+a^2\sin^2\theta=2a^2(1+\cos\theta)$$
$$=2a^2(1+2\cos^2\theta-1)=4a^2\cos^2\theta$$

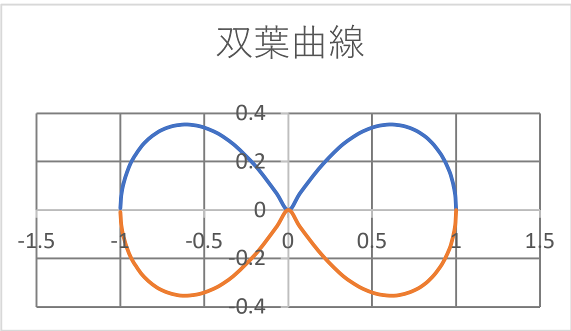
したがって

$$\mathcal{L}=2\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta=2\int_0^{\pi}2a\cos\frac{\pi}{2}d\theta=4a\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=8a$$

例12

双葉曲線　$r^2=2a^2\cos2\theta$　の全長

$(a>0)$



$\cos2\theta\geqq0$　であるから　$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$

求める全長はは

$$\mathcal{L}=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\qquad 2r\frac{dr}{d\theta}=-4a^2\sin2\theta\qquad \frac{dr}{d\theta}=-2a^2\frac{\sin2\theta}{r}$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2a^2\cos2\theta+\frac{4a^4\sin^2\theta}{2a^2\cos2\theta}}d\theta=4\sqrt{2}a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta}{\cos2\theta}}d\theta$$

$$=4\sqrt{2}a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos2\theta}}d\theta=4\sqrt{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}d\theta$$

この定積分は楕円積分というものであって、初等関数では積分不可である