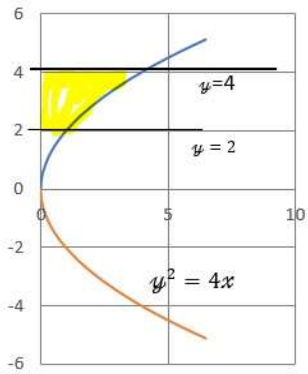
1

放物線　$y^2=4x$　と　$y=2$　$y=4$　と　y軸とで

囲まれた面積

$$S=\int_2^4 x\,dy=\int_2^4\frac{y^2}{4}dy=\left[\frac{y^3}{12}\right]_2^4=\frac{64-8}{12}=\frac{56}{12}=\frac{14}{3}$$



2

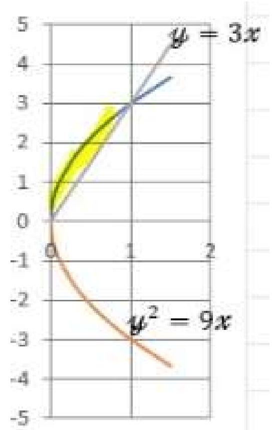
放物線　$y^2=9x$　と　$y=3x$　とで囲まれた面積

交点の y 座標は

$y^2=3y$　だから　　$y=0,$　　$y=3$

したがって求める面積は

$$S=\int_0^3\left(\frac{y}{3}-\frac{y^2}{9}\right)dy=\left[\frac{y^2}{6}-\frac{y^3}{27}\right]_0^3=\frac{9}{6}-\frac{27}{27}=\frac{1}{2}$$



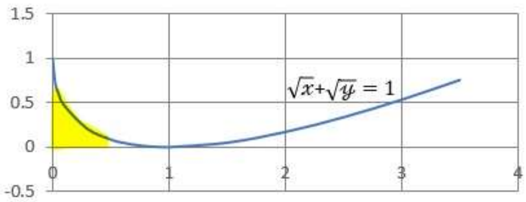
3

放物線　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$　と座標軸とで

囲まれた面積

y　について解くと　$y=(1-\sqrt{x})^2$

$y=0$　のとき$x=1$　であるから求める面積は



$$S=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2dx=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx=\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

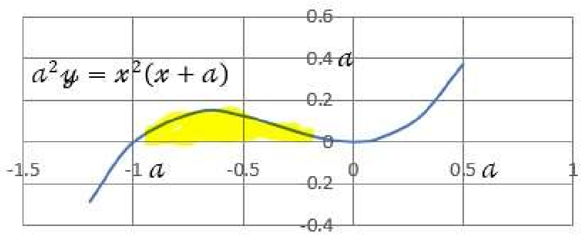
4

曲線　$a^2y=x^2(x+a)$　と　x軸との間の面積

x　軸との交点の座標は

$y=0$　とすると　$x=0,$　　$-a$

したがって求める面積は

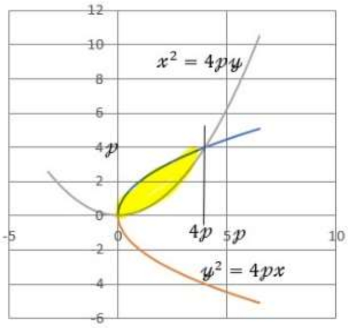


$$S=\frac{1}{a^2}\int_{-a}^0(x^3+ax^2)dx=\frac{1}{a^2}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{ax^3}{3}\right]_{-a}^0=-\frac{1}{a^2}\left(\frac{a^4}{4}+\frac{a(-a)^3}{3}\right)=\frac{1}{12}a^2$$

5

二つの放物線　$y^2=4px$　、$x^2=4py$　によって

囲まれた部分の面積



交点の座標は　$\left(\dfrac{x^2}{4p}\right)^2=4px$　　$x^4=(4p)^3x$

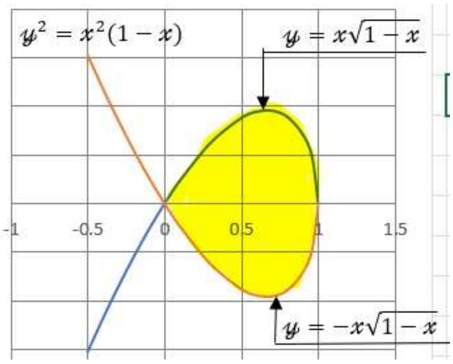
$x=0,\ 4p$

したがって求める面積は

$$S=\int_0^{4p}\left(\sqrt{4px}-\frac{x^2}{4p}\right)dx=\left[\sqrt{4p}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{12p}\right]_0^{4p}=\frac{2}{3}(4p)^2-\frac{(4p)^4}{12p}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)(4p)^2=\frac{16}{3}p^2$$

6

曲線　$y^2=x^2(1-x)$　の自閉線内の面積



$y=\pm x\sqrt{1-x}$　であるから　x軸との交点の座標は

$x=0,\quad 1$

したがって求める面積は

$$S=2\int_0^1 2x\sqrt{1-x}dx$$　　$\sqrt{1-x}=t$　とおくと

$dx=-2tdt$

$$S=2\int_1^0(1-t^2)t\cdot(-2t)dt=-4\int_1^0(t^2-t^4)dt=4\left[\frac{t_3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\frac{8}{15}$$