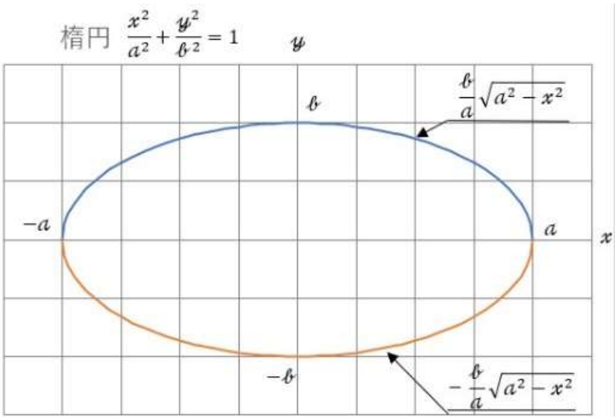
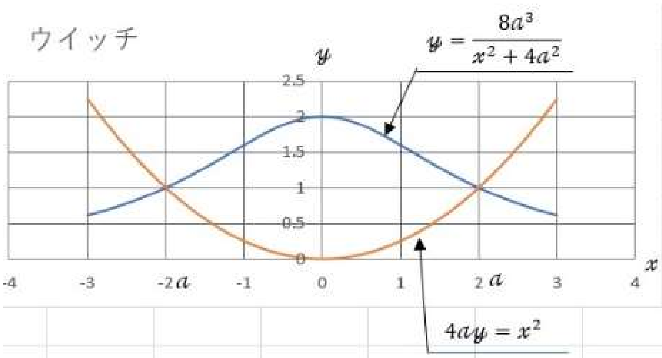
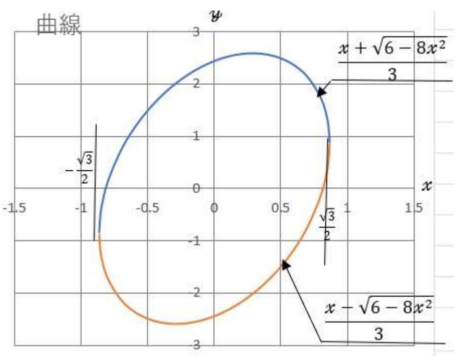
定積分応用問題解答

P196 面積

例1	楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ の面積  y について解くと $y=\pm\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $y=0$ のとき $x=-a,\ a$ となるので求める面積は $S=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=4\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a=2\frac{b}{a}\cdot\frac{\pi}{2}a^2=ab\pi$ ※ $a=b$ のときは円の面積 $a^2\pi$ となる
例2	ウイッチ $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ と 放物線 $4ay=x^2$ によって囲まれた部分の面積  交点の座標は $4a\frac{8a^3}{x^2+4a^2}=x^2$ $x^4+4a^2x^2-32a^4=0$ $(x^2+8a^2)(x^2-4a^2)=0$ 実数の解のみをとると $x=\pm2a$ となるので求める面積は $S=2\int_0^{2a}\left(\frac{8a^3}{x^2+4a^2}-\frac{x^2}{4a}\right)dx=2\left[\frac{8a^3}{2a}\tan^{-1}\frac{x}{2a}-\frac{1}{4a}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a}$ $=2\left(4a^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4a}\cdot\frac{8a^3}{3}\right)=2\left(a^2\pi-\frac{2}{3}a^2\right)$

例3　曲線　$3x^2-2xy+3y^2=2$　で囲まれた面積



y　について解くと

$$y=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2-12(3x^2-2)}}{6}=\frac{x\pm\sqrt{6-8x}}{3}$$

したがって　$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$

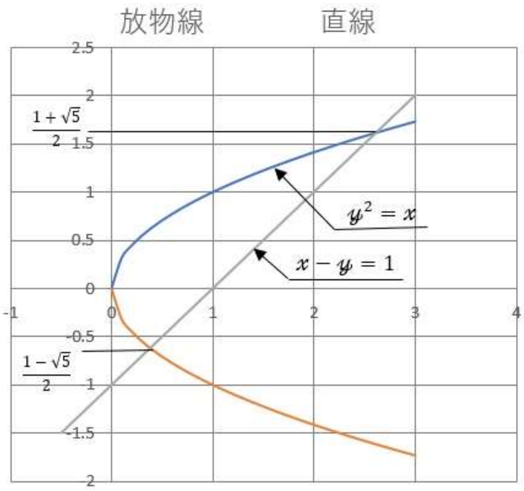
となるので面積は

$$S=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{x+\sqrt{6-8x^2}}{3}-\frac{x-\sqrt{6-8x^2}}{3}\right)dx=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-4x^2}dx$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}2\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-x^2dx}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}+\frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

例4　放物線　$y^2=x$　と　直線　$x-y=1$　とで囲まれた部分の面積



交点の座標は

$$y^2=1+y$$

$$y^2-y-1=0$$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

したがって求める面積は

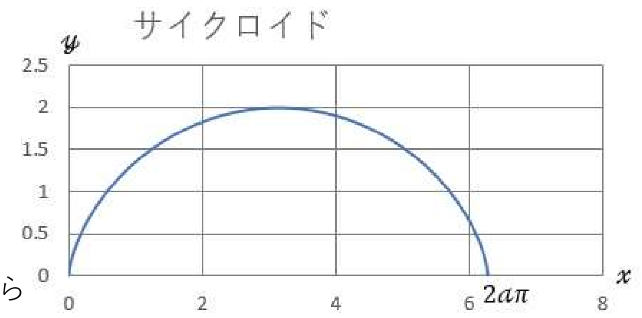
$$S=\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}(y+1-y^2)dx=\left[\frac{y^2}{2}+y-\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{2^2}\right)+\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}-1+3\sqrt{5}-15+5\sqrt{5}}{2^3}\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{5}}{8}+\frac{2\sqrt{5}}{2}-\frac{16\sqrt{5}}{24}=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{2\sqrt{5}}{2}-\frac{2\sqrt{5}}{3}=\frac{9-4}{6}\sqrt{5}=\frac{5}{6}\sqrt{5}$$

例5

サイクロイドの一つの弧　$x = a(t - \sin t)$　、$y = a(1 - \cos t)$　　$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$
と　x 軸との間の面積



$y = 0$　のときの　x　座標は

$a(1 - \cos t) = 0$　$t = 0$、2π　となるから

$x = a(0 - \sin 0) = 0$、$x = a(2\pi - \sin 2\pi) = 2a\pi$

したがって求める面積は　$dx = a(1 - \cos t)dt$　となるので

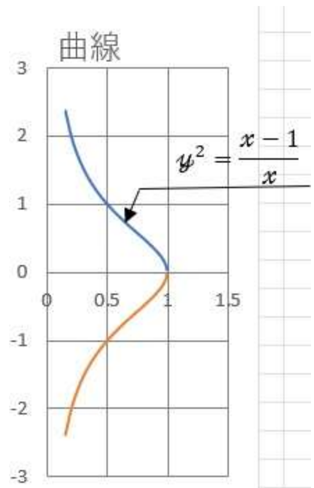
$$S = \int_0^{2a\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\sin t + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\right)dt = a^2 \left[\frac{3}{2}t + 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}$$

$$= a^2(3\pi - 0 + 0) = 3a^2\pi$$

例6

曲線　$y^2 = \frac{1-x}{x}$　と　y 軸との間の面積



x　について解くと

$xy^2 = 1 - x$　　　　$x = \dfrac{1}{y^2 + 1}$

したがって求める面積は

$$S = 2\int_0^{\infty} x\,dy = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{y^2 + 1}dy = 2[\tan^{-1} y]_0^{\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi$$