P138

1

$f(x)=\frac{1}{3}x^3$ とおくと $f(x)'=x^2$

$g(x)=\log x$ とおくと $g(x)'=\frac{1}{x}$

$=\frac{1}{3}x^3\log x-\int\frac{1}{3}x^3\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3=\frac{1}{3}x^3\left(\log x-\frac{1}{3}\right)$

2

$f(x)=x$ とおくと $f(x)'=1$

$g(x)=-\cos x$ とおくと $g(x)'=\sin x$

$=-x\cos x-\int-\cos x dx=-x\cos x+\sin x$

3

$f(x)=x$ とおくと $f(x)'=1$

$g(x)=\sin^{-1}x$ とおくと $g(x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$=x\sin^{-1}x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sin^{-1}x+\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$

4

$f(x)=x$ とおくと $f(x)'=1$

$g(x)=\tan^{-1}x$ とおくと $g(x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$

5

$f(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ とおくと $f(x)'=x^n$

$g(x)=\log x$ とおくと $g(x)'=\frac{1}{x}$

$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\log x-\frac{1}{n+1}\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\log x-\frac{1}{n+1}\right)$

6

$f(x)=\frac{1}{4}x^4$ とおくと $f(x)'=x^3$

$g(x)=\tan^{-1}x$ とおくと $g(x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$=\frac{1}{4}x^4\tan^{-1}x-\frac{1}{4}\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=\frac{1}{4}x^4\tan^{-1}x-\frac{1}{4}\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$=\frac{1}{4}x^4\tan^{-1}x-\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-x+\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{4}\tan^{-1}x(x^4-1)-\frac{x^3}{12}+\frac{x}{4}$

7

$f(x)=e^{ax}$ とおくと $f(x)'=ae^{ax}$

$g(x)=\frac{1}{b}\sin bx$ とおくと $g(x)'=\cos bx$

$g(x)=-\frac{1}{b}\cos bx$ とおくと $g(x)'=\sin bx$

$=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\int\frac{a}{b}e^{ax}\cos bx\,dx\right)$

$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx$

$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx\right)=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)$

8

$f(x)=e^{-ax}$ とおくと $f(x)'=-ae^{-ax}$

$g(x)=-\frac{1}{b}\cos bx$ とおくと $g(x)'=\sin bx$

$g(x)=\frac{1}{b}\sin bx$ とおくと $g(x)'=\cos bx$

$=-\frac{1}{b}e^{-ax}\cos bx-\frac{a}{b}\int e^{-ax}\cos bx dx=-\frac{1}{b}e^{-ax}\cos bx-\frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx+\int\frac{a}{b}e^{-ax}\sin bx\,dx\right)$

$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{-ax}cos\,bx dx=-\frac{1}{b}e^{-ax}\cos bx-\frac{a}{b^2}e^{-ax}sinbx$

$\int e^{-ax}\sin bx dx=\frac{-b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{b}e^{-ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{-ax}\sin bx\right)=\frac{-e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\cos bx+asinbx)$

9

$f(x)=\log x$ とおくと $f(x)'=\frac{1}{x}$

$g(x)=-(x+1)^{-1}$ とおくと $g(x)'=(x+1)^{-2}$

$=\frac{-\log x}{x+1}-\int\frac{-1}{x(x+1)}dx=\frac{-\log x}{x+1}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\frac{-1}{x+1}\log x+\log x-\log(x+1)=\frac{x}{x+1}\log|x|-\log|x+1|$

10

$f(x)=-e^{-x}$ とおくと $f(x)'=e^{-x}$

$g(x)=x^2$ とおくと $g(x)'=2x$

$g(x)=x$ とおくと $g(x)'=1$

$=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2\left(-xe^{-x}+\int e^{-x}dx\right)=-e^{-x}(x^2+2x+2)$

11

$f(x)=x$　　とおくと　　$f(x)'=1$

$g(x)=\sqrt{a^2-x^2}$　　とおくと　　$g(x)'=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

12

$f(x)=x$　　とおくと　　$f(x)'=1$

$g(x)=\sqrt{x^2-a^2}$　　とおくと　　$g(x)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}dx-\int\frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$